Τσαμαίτος 01.03.16.

{ J μπορεί να μην είναι πεπερασμένο!! }

Πρόταση: Ας είναι A_i, $i \in J$ οικογένεια υποσυνόλων ενός μ.χ E. Τότε:

i) $\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)^{o} \supseteq \bigcup_{i\in J} A_i^{o}$, ii) $\overline{\bigcup_{i\in J} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in J} \overline{A_i}$

iii) $\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)^{o} \subseteq \bigcap_{i\in J} A_i^{o}$, iv) $\overline{\bigcap_{i\in J} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in J} \overline{A_i}$

Απόδ:

(i) $\forall i \in J$ $A_i \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i \Longrightarrow A_i^{o} \subseteq \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)^{o}$

$\Longrightarrow \bigcup_{i\in J} A_i^{o} \subseteq \left(\bigcup_{i\in J} A_i\right)^{o}$

(iv) $\forall i \in J$ $\bigcap_{i\in J} A_i \subseteq A_i \Longrightarrow \overline{\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)} \subseteq \overline{A_i}$

$\Longrightarrow \overline{\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right)} \subseteq \bigcap_{i\in J} \overline{A_i}$

Άσκηση: Έστω $A, B \subseteq E$ μ.χ. Ισχύουν:

i) $\partial A^\circ \subseteq \partial A$, ii) $\partial \bar{A} \subseteq \partial A$, iii) $\partial(\partial A) \subseteq \partial A$

iv) $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

Αποδ. $(\partial A = \bar{A} - A^\circ)$ $\qquad (A^\circ \subseteq A \rightsquigarrow \overline{A^\circ} \subseteq \bar{A})$

(i) $\partial A^\circ = \overline{A^\circ} - A^{\circ\circ} = \overline{A^\circ} - A^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$.

(ii) $\partial \bar{A} = \bar{\bar{A}} - (\bar{A})^\circ = \bar{A} - (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} - A^\circ = \partial A$.

$(A \subseteq \bar{A} \rightsquigarrow A^\circ \subseteq \bar{A}^\circ)$

(iii) $\partial(\partial A) = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ = \partial A - (\partial A)^\circ \subseteq \partial A$.

(iv) Λόγω του (iii) $\partial(\partial(\partial A)) \subseteq \partial(\partial A) = \overline{\partial(\partial A)} - (\partial(\partial A))^\circ$

Αρκεί λοιπόν νδο $\partial(\partial A) \subseteq \partial(\partial(\partial A))$

Έστω $\underbrace{x \in \partial(\partial A)}_{\Downarrow \; x \in \overline{\partial(\partial A)}} = \overline{\partial A} - (\partial A)^\circ \iff x \in \overline{\partial A} \wedge x \notin (\partial A)^\circ$

$$x \notin (\partial A)^\circ \xrightarrow[\partial(\partial A) \subseteq \partial A \Rightarrow (\partial(\partial A))^\circ \subseteq (\partial A)^\circ]{} x \notin (\partial(\partial A))^\circ$$

Άρα: $x \in \overline{\partial(\partial A)} \wedge x \notin (\partial(\partial A))^{\circ}$

$\Rightarrow x \in \overline{\partial(\partial A)} - (\partial(\partial A))^{\circ} = \partial(\partial(\partial A))$

Τελικά δηλαδή:

$$\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$$

<u>Παραδείγματα</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } A \subseteq E \text{ διακ. μ.χ και } x \in A. \\ B(x, 1/2) = \{x\} \subseteq A \Rightarrow x \in A^{\circ} \end{array}\right\} A \subseteq A^{\circ} \xRightarrow{A^{\circ} \subseteq A}$$

$A^{\circ} = A$, δηλ κάθε υποσύνολο διακ. μ.χ, ταυτίζεται με τον πυρήνα του.

$$\text{Έστω τώρα } x \in \bar{A} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow \{x\} \cap A = \emptyset, \text{ άτοπο} \end{cases}$$

γιατί $x \in \bar{A}$, άρα η τομή οποιασδήποτε περιοχής του x με το A είναι $\neq \emptyset$, άρα έπεται ότι $x \in A$.

Άρα $\bar{A} \subseteq A \xRightarrow{A \subseteq \bar{A}} \bar{A} = A$, δηλ κάθε υποσύνολο διακ. μ.χ ταυτίζεται με τον πυρήνα του.

Σε τυχόντα μ.χ. ισχύει $\overline{\{a\}} = \{a\}$ (Δεν ισχύει $\{a\}^{\circ} = \{a\}$,

Ισχύει:

$\{a\} \subseteq \overline{\{a\}}$. Αρκεί νδο $\overline{\{a\}} \subseteq \{a\}$

Έστω $x \in \overline{\{a\}} \iff \forall r > 0 \ B(x,r) \cap \{a\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \ B(x, \frac{1}{\nu}) \cap \{a\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \ a \in B(x, \frac{1}{\nu}) \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{N} \ 0 \leq \rho(x,a) \leq \frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow 0 \leq \rho(x,a) = 0 \Rightarrow \rho(x,a) = 0 \Rightarrow x = a$

$\Rightarrow x \in \{a\}$

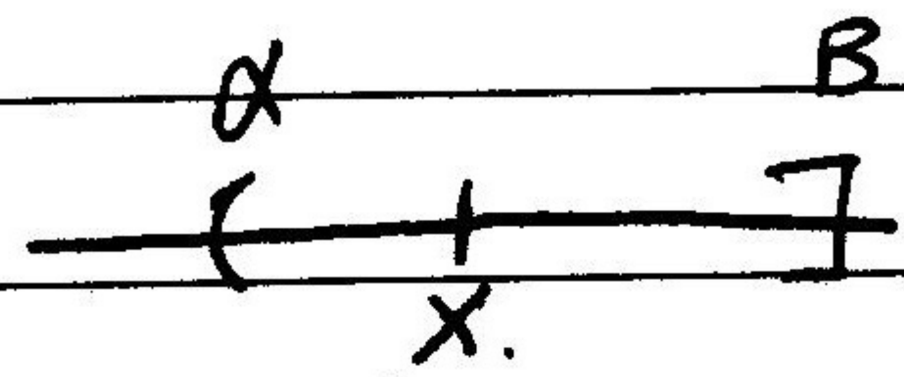
Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $a \in \mathbb{R}$ $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $r > 0$.

$x \in \{a\}^{\circ} \Rightarrow \exists r > 0 \ B(x,r) = (x-r, x+r) \subseteq \{a\}$

$\{a\}^{\circ} = \emptyset$.

$(\mathbb{R}, \|\ \|)$, $(\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$

$(\alpha,\beta]^{0} \subseteq (\alpha,\beta]$



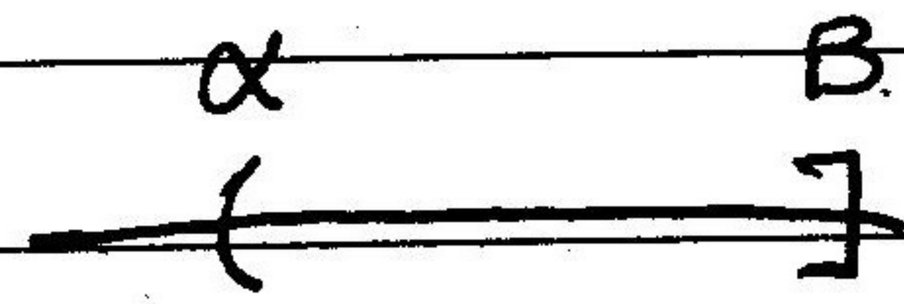
$\alpha<x<\beta$, $x-\alpha>0$, $\beta-x>0$.

Θεωρούμε ως $r=\min\{x-\alpha,\beta-x\}$

Τότε $(x-r,x+r)\subseteq(\alpha,\beta]$, άρα $(\alpha,\beta]^{0}=(\alpha,\beta)$.

$\Rightarrow (\alpha,\beta]\subseteq(\alpha,\beta]^{0}$

$\overline{(\alpha,\beta]} \supseteq (\alpha,\beta]$



Έστω $x<\alpha$, με $x\in\overline{(\alpha,\beta]}$. Τότε $\forall r>0$ $B(x,r)\cap(\alpha,\beta]\neq\emptyset$.

Τότε $\alpha-x>0$. Θεωρώ $r=\frac{\alpha-x}{2}$. Τότε $B(x,\frac{\alpha-x}{2})\cap(\alpha,\beta]=\emptyset$

, άρα $x<\alpha$ το $x\notin\overline{(\alpha,\beta]}$.

$\partial(\alpha,\beta]=\overline{(\alpha,\beta]}-(\alpha,\beta]^{0}=[\alpha,\beta]-(\alpha,\beta)=\{\alpha,\beta\}$.